

## A HIPÓTESE DE RIEMANN

FERNANDO FERREIRA

Fixemos um número real  $x > 1$ . Então, para todo o número complexo  $s$  com  $Re(s) > x$ , tem-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^s} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{Re(s)}} \leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{Re(s)}} \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{y^{Re(s)}} dy = 1 + \frac{1}{Re(s) - 1} \leq 1 + \frac{1}{x - 1}$$

onde a desigualdade do meio se justifica usando o teste do integral. O teste de convergência de Weierstrass diz-nos que, nestas condições, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  é absolutamente convergente (em cada ponto  $s$ ) e é uniformemente convergente na região dos complexos  $s$  com  $Re(s) > x$ . Agora, é consequência do teorema de Morera da análise complexa (ver (1) do apêndice no final desta secção), que a função zeta de Riemann  $\zeta$  é holomorfa no domínio dos valores  $s$  com  $Re(s) > 1$ .

Riemann mostrou que é possível estender a função  $\zeta$  a uma função holomorfa definida em  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$  (também se diz que  $\zeta$  tem uma *continuação holomorfa* ou *continuação analítica* a  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ ). Aqui vamos mostrar apenas que  $\zeta$  tem uma continuação holomorfa a  $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > 0 \text{ e } s \neq 1\}$ .

Para  $s \in \mathbb{C}$ , com  $Re(s) > 1$ , tem-se:

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \int_1^{\infty} \frac{1}{y^s} dy = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{n^s} dy - \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{y^s} dy = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left( \frac{1}{n^s} - \frac{1}{y^s} \right) dy$$

Pelo teorema da diferenciação do integral paramétrico (regra de Leibniz) tem-se que, para cada número natural  $n$ , a função  $s \rightsquigarrow \int_n^{n+1} \left( \frac{1}{n^s} - \frac{1}{y^s} \right) dy$  é holomorfa em  $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > 0\}$ . Também se tem, para cada  $n \in \mathbb{N}$  e  $s \in \mathbb{C}$  com  $Re(s) > 0$ , a seguinte desigualdade (ver um exercício das folhas):

$$(*) \quad \int_n^{n+1} \left| \frac{1}{n^s} - \frac{1}{y^s} \right| dy \leq \frac{|s|}{n^{Re(s)+1}}$$

Note-se que para  $s$  número complexo com  $Re(s) > 0$ , a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s|}{n^{Re(s)+1}}$  é convergente (pois tem-se  $Re(s) + 1 > 1$ ). Agora, usando o teste de convergência de Weierstrass aplicado a esta série e, novamente pelo teorema de Morera, conclui-se que a função

$$s \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left( \frac{1}{n^s} - \frac{1}{y^s} \right) dy$$

é holomorfa em  $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > 0\}$  (para mais detalhes, ver (2) do apêndice). Mostrámos, pois, que esta função é uma continuação holomorfa da função  $s \rightsquigarrow \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$  ao semi-plano de  $\mathbb{C}$  de parte real positiva. Sai, obviamente, que a função

$$s \rightsquigarrow \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left( \frac{1}{n^s} - \frac{1}{y^s} \right) dy$$

é uma continuação holomorfa da função  $\zeta$  à região  $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > 0 \text{ e } s \neq 1\}$ . Como se vê, esta continuação holomorfa tem um polo simples em 1 de resíduo 1.

Podemos, portanto, considerar a função zeta de Riemann como uma função holomorfa em  $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > 0 \text{ e } s \neq 1\}$ . Sabe-se que os zeros desta função estão intimamente ligados à distribuição dos números primos. Pela fórmula do produto de Euler, sabemos que a função zeta não tem zeros em  $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > 1\}$ . A demonstração do teorema do número primo de Hadamard

e de de la Vallée-Poussin baseia-se no facto crucial de que a função  $\zeta$  também não tem zeros quando  $Re(s) = 1$  (é um exercício das folhas mostrar este facto). Assim, os zeros (não triviais) da função zeta de Riemann encontram-se na *faixa crítica*  $\{s \in \mathbb{C} : 0 < Re(s) < 1\}$ . Apelidámos estes zeros de não triviais porque, quando se considera a continuação holomorfa de  $\zeta$  a  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$  (o que não estudámos) existem zeros de  $\zeta$  em  $-2, -4, -6, \dots$ , os chamados zeros triviais.

A *hipótese the Riemann* diz que todos os zeros (não triviais) da função  $\zeta$  têm parte real  $\frac{1}{2}$ . Este é talvez o problema em aberto mais importante da matemática atual.

### Apêndice

O seguinte teorema é muito útil para mostrar que certas funções de variável complexa são holomorfas:

**Teorema (Morera).** *Seja  $\Omega$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{C}$  e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  uma função contínua tal que  $\oint_{\gamma} f(s)ds = 0$  para toda a curva fechada suave  $\gamma$ . Então  $f$  é uma função holomorfa em  $\Omega$ .*

Uma curva fechada diz-se suave se a sua parametrização é uma função contínua que tem derivada contínua e diferente de zero, exceto talvez num número finito de pontos. Esta noção de curva é muito geral. Para o teorema de Morera bastava, por exemplo, considerar curvas que são fronteiras de rectângulos verticais.

**Corolário 1.** *Seja  $\Omega$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{C}$  e  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  uma sucessão de funções holomorfas de  $\Omega$  para  $\mathbb{C}$  a convergir uniformemente para a função  $f$ . Então  $f$  é holomorfa em  $\Omega$ .*

**Observação.** A formulação deste corolário não é a mais tradicional. A formulação usual enfraquece a hipótese para sucessão de funções a convergir uniformemente *em compactos*. Optámos por esta formulação menos forte e menos elegante para evitar enunciar o corolário com a noção de convergência uniforme em compactos.

**Demonstração.** Visto que cada  $f_k$  é contínua (é holomorfa) e  $f$  é limite uniforme dos  $f_k$ , sabemos que  $f$  é contínua. Para toda a curva fechada suave  $\gamma$  em bolas de  $\Omega$ , tem-se:

$$\oint_{\gamma} f(s)ds = \oint_{\gamma} \lim_k f_k(s)ds = \lim_k \oint_{\gamma} f_k(s)ds = \lim_k 0 = 0$$

pois, pela convergência uniforme, a integração comuta com o limite (e, note-se,  $\oint_{\gamma} f_k(s)ds = 0$ , pois cada  $f_k$  é holomorfa). O resultado sai pelo teorema de Morera.  $\square$

Seguem-se duas justificações detalhadas de resultado que usámos nesta secção.

- (1) Fixe-se  $x$  um número real maior do que 1. A sucessão  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de funções holomorfas definidas em  $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > x\}$  pelas somas parciais  $f_k(s) = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^s}$  converge uniformemente em  $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > x\}$  para a função  $\zeta$  (teste de convergência de Weierstrass). Pelo Corolário acima,  $\zeta$  é holomorfa em  $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > x\}$ .

Dado que  $x$  é um real qualquer maior do que 1, vem que  $\zeta$  é holomorfa no domínio  $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > 1\}$ .

- (2) O argumento de (1), agora aplicado à sucessão de funções holomorfas  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$  definidas em  $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > 0\}$  por  $g_k(s) = \sum_{n=1}^k \int_n^{n+1} (\frac{1}{n^s} - \frac{1}{y^s}) dy$ , mostra que a função

$$s \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left( \frac{1}{n^s} - \frac{1}{y^s} \right) dy$$

é holomorfa em  $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > 0\}$ . Note-se que o teste de convergência de Weierstrass aplica-se por causa de  $(\star)$ .